Álgebra Lineal II
Facultad de Ciencias
UNAM

Teoremario

Roberto Ocelotzin López Aguirre

1 El espacio dual

Definición 1.1 (Espacio Dual)**.** Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. El espacio dual de V está dado por:

$$V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$$

Definición 1.2 (Función Coordenada)**.** La k-ésima función coordenada respecto a la base β se define como $f_k : V \to \mathbb{K}$ tal que $f_k(v) = \lambda_k$. Con λ_k el k-ésimo elemento de la base ordenada β.

Teorema 1.1 (Base Dual)**.** *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, con $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V. Entonces el conjunto $\beta^* = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ es base de V^*. A esta la llamamos la base dual.*

Más aún, para cada $f \in V^*$:

$$f = \sum_{i=1}^{n} f(v_i) f_i$$

Definición 1.3 (Transformación transpuesta)**.** Sean $(V, +, \cdot), (W, +, \cdot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con las bases respectivas β y γ. Para cualquier transformación lineal, la transformación transpuesta $T^t : W^* \to V^*$ es dada por $T^t(g) = gT$.

Teorema 1.2. *La transformación transpuesta es lineal, y más aún:*

$$\left[T^t\right]_{\gamma^*}^{\beta^*} = \left([T]_{\beta}^{\gamma}\right)^t$$

Ejemplo 1.1. *Dado el espacio $\mathbb{R}^3$ con la base $\beta = \{(1,1,2), (1,2,1), (2,1,1)\}$; encontrar de manera explícita la base dual β^*.*

Solución: . Sabemos que la base dual consiste de las funciones coordenadas, entonces para cada función coordenada se toma que:

$$\begin{aligned} f_1(1,1,2) &= f_1(e_1) + f_1(e_2) + (2)f_1(e_3) = 1 \\ f_1(1,2,1) &= f_1(e_1) + (2)f_1(e_2) + f_1(e_3) = 0 \\ f_1(2,1,1) &= (2)f_1(e_1) + f_1(e_2) + f_1(e_3) = 0 \end{aligned}$$

Ahora resolvemos el sistema y tenemos que $f_1(e_1) = \frac{1}{4}$, $f_1(e_2) = -\frac{1}{4}$ y $f_1(e_3) = \frac{3}{4}$. Entonces:

$$f_1(x, y, z) = \frac{x}{4} - \frac{y}{4} + \frac{3z}{4}$$

Esto se hace para las tres funciones y obtenemos la forma explícita.

Q.E.F

Definición 1.4 (Aniquilador)**.** Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita. Para cada subconjunto S de V, definimos el aniquilador (anulador) S° de S como:

$$S^\circ = \{f \in V^* : f(v) = 0, \forall v \in S\}$$

Definición 1.5 (Invarianza)**.** Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $W \leq V$ con $T : V \to V$ lineal. Decimos que W es T-invariante si $T(w) \in W, \forall w \in W$. Es decir si $T[W] \subseteq W$.

Teorema 1.3. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $W \leq V$ y $T : V \to V$ lineal. W es T-invariante si y sólo si W° es T^t-invariante.*

Demostración: . $\implies$ Supongamos que W es T-invariante, vamos a demostrar que para un funcional $f \in W^\circ$, $T^t(f)$ está igual en el aniquilador.

Esto es cierto, ya que $T^t(f) = f \circ T$, entonces para cualquier $w \in W$, $T^t(f)(w) = 0$, ya que cualquier $T(w)$ está en W, y como f está en el aniquilador de W, cualquier vector de este subespacio lo va a llevar a 0. Por esto, $T^t(f) \in W^\circ$. Así W° es T^t-invariante.

$\Longleftarrow$ Ahora supongamos que W° es T^t-invariante. Vamos a demostrar que para cualquier $w \in W$, $T(w) \in W$.

Si W° es T^t-invariante, entonces para cualquier $f \in W^\circ$ tenemos que $T^t(f) = f \circ T \in W^\circ$. Vamos a proceder por contradicción.

Supongamos que en efecto W° es T^t-invariante, pero W no es T-invariante, entonces existe un elemento $z \in W$ tal que $T(z) \notin W$. Entonces si tomamos $T^t(f)(z)$, vamos a ver que es distinto de cero, ya que en $f(T(z))$, no estamos evaluando un elemento de W para el aniquilador de W, por lo que existe un $T^t(f) \notin W^\circ$. Esto es una contradicción.

Por lo tanto W es T-invariante.

Q.E.D

Definición 1.6. Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Para cada $v \in V$ definimos $\hat{v} : V^* \to \mathbb{K}$ como:

$$\hat{v}(f) = f(v)$$

Nota. La función definida anteriormente es lineal. Por lo tanto $\hat{v} \in V^{**}$

Lema 1.1. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita n y $v \in V$. Si $\hat{v}(f) = 0$ para toda $f \in V^*$, entonces $v = 0$*

Teorema 1.4. *La dimensión del espacio dual es la misma que la del espacio original.*

Teorema 1.5. *Sea* $(V,+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial. La función* $\psi : V \to V^{**}$ *dada por* $\psi(v) = \hat{v}$ *es un isomorfismo.*

Demostración: . Un isomorfismo es una biyección lineal. Evidentemente ψ es lineal. Por el lema anterior si $\psi(v) = 0$, entonces estamos evaluando en el vector cero. Así el núcleo $N(\psi) = \{0\}$. Entonces es inyectiva, y porque está definida en todo el espacio es una biyección. Por lo tanto es invertible y un isomorfismo.

Q.E.D

Teorema 1.6. *Sea* $(V,+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial y el subconjunto* $S \subset V$*. Entonces:*

$$(S^\circ)^\circ = \langle \psi(S) \rangle$$

Teorema 1.7. *Sean* $(V,+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial de dimensión finita y* $W \leq V$ *subespacio. Entonces* $dim(V) = dim(W) + dim(W^\circ)$

Las demostraciones de estos dos teoremas se recomiendan como ejercicios.

Teorema 1.8. *Sean* $(V,+,\cdot),(W,+,\cdot)$ *dos* $\mathbb{K}$*-espacios vectoriales de dimensión finita y* $T : V \to W$ *lineal. Entonces* $N(T^t) = (Im(T))^\circ$

Demostración: .

- $\subset$ Sea $f \in N(T^t)$, entonces $f(T(V)) = 0$, ya que como f está en el nucleo manda a cero cualquier elemento de la imágen de T, es decir $f \in (\mathrm{Im}(T))^\circ$.
- $\supset$ Ahora si tomamos $f \in (\mathrm{Im}(T))^\circ$, entonces $f(T(v)) = 0$. Por lo tanto $f \in N(T^t)$

Q.E.D

Teorema 1.9. *Sea* $(V,+,\cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial no nulo de dimensión finita y sea* W *un subespacio propio de* V*. Entonces existe un funcional no nulo* $f \in V^*$ *tal que* $f(w) = 0, \forall w \in W$

La demostración se deja como ejercicio.

2 Productos internos

Definición 2.1 (Producto interno)**.** Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Un producto interno en V es una función (binaria), $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$ que satisface para todo $u, v, w \in V$ y para todo $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v + w \rangle$
2. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$
3. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
4. $\langle u, v \rangle > 0$ si $u \neq 0$

Teorema 2.1. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interior $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{K}$, con el campo real o complejo. Entonces se cumple:*

1. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
2. $\langle u, \lambda v \rangle = \overline{\lambda} \langle u, v \rangle$
3. $\langle u, 0 \rangle = 0 = \langle 0, u \rangle$
4. $\langle u, u \rangle = 0 \iff u = 0$
5. *Si* $\langle u, v \rangle = \langle u, w \rangle, \forall u,$ *entonces* $v = w$

Definición 2.2 (Norma)**.** Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno y $u \in V$. La norma de u está dada por:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Nota. $\langle u, u \rangle = \|u\|^2$

Teorema 2.2. *Sean $(V, +, \cdot), (W, +, \cdot)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con campo real o complejo y un producto interno. Si $T : V \to W$ es lineal, entonces:*

$$\langle x, y \rangle = \langle T(x), T(y) \rangle$$

Es producto interno si y sólo si T es inyectiva.

Demostración: . Supongamos que en efecto es producto interno. Sea $u \in N(T)$, entonces $T(u) = 0$, así $\langle u, u \rangle = 0$. Ya que $\langle T(u), T(u) \rangle = 0$.

El otro lado de la demostración es un procedimiento común para comprobar las cuatro propiedades de producto interno.

Q.E.D

Teorema 2.3. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno. Entonces:*

1. $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$
2. $\|u\| \geq 0$ *y* $\|u\| = 0 \iff u = 0$
3. $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ *(Desigualdad de Cauchy-Schwarz)*

4. $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(Desigualdad del triángulo)*

Definición 2.3. Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno. Decimos que:

1. $u, v \in V$ son ortogonales si $\langle u, v\rangle = 0$. Se denota como $u \perp v$.
2. $S \subseteq V$ es ortogonal si $u \perp v, \forall u, v \in S$ con $u \neq v$.
3. $u \in V$ es unitario si $\|u\| = 1$.
4. $S \subseteq V$ es ortonormal si es ortogonal y sus elementos son unitarios.

Definición 2.4. Decimos que $\beta \subset V$ es una base ortonormal si:

1. Genera a V
2. Es linealmente independiente
3. Es ortogonal
4. Todos sus vectores son unitarios

Definición 2.5 (Complemento ortogonal)**.** Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno y $S \subseteq V$, con $S \neq \varnothing$. El complemento ortogonal de S está dado por:

$$S^{\perp} = \{v \in V : \langle v, w\rangle = 0, \forall w \in S\}$$

Ejemplo 2.1. *Sea* $S = \{(2, 3, 1)\}$*. Encontrar* $S^{\perp}$ *si* $S \subset \mathbb{R}^3$*.*

Solución: . Buscamos los vectores $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que $\langle u, (2, 3, 1)\rangle = 0$. Es decir buscamos x, y, z tales que $2x + 3y + z = 0$.

$$\therefore S^{\perp} = \{(x, y, z) : 2x + 3y + z = 0\}$$

Q.E.F

Teorema 2.4. *Sea* $(V, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial, con* $S \subset V$*, entonces* $S^{\perp}$ *es un subespacio vectorial de* V*.*

Teorema 2.5. *Sea* $(V, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial con producto interno. Entonces* $|\langle x, y\rangle| = \|x\|\|y\| \iff$ *uno de los vectores es múltiplo del otro.*

El teorema anterior se deja como ejercicio.

Teorema 2.6. *Sean* $(V, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial y* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *un conjunto ortogonal tal que* $0 \notin S$*. Entonces si* $u \in \langle S\rangle$*:*

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i\rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

Demostración: . Sabemos que existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tal que:

$$u = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i$$

Ahora sólo tenemos que ver que:

$$\lambda_j = \frac{\langle u, v_j \rangle}{\|v_j\|^2}$$

Esto es cierto si notamos que la combinación lineal que genera a u se puede expresar afuera del producto interno:

$$\begin{aligned}
\langle u, v_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i v_i, v_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle v_i, v_j \rangle \\
&= \lambda_j \|v_j\|^2
\end{aligned}$$

Por lo tanto.

$$u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle u, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i$$

Q.E.D

Teorema 2.7 (Gram-Schmidt)**.** *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno con $S = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ un conjunto linealmente independiente. Definimos $S' = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ donde $v_1 = w_1$ y para cada $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$:*

$$v_k = w_k - \sum_{j_1}^{k-1} \frac{\langle w_k, v_j \rangle}{\|v_j\|^2} v_j$$

Entonces S' es un conjunto ortogonal tal que $0 \notin S'$ y $\langle S' \rangle = \langle S \rangle$.

Ejemplo 2.2. *Sea $V = \mathbb{R}^3$ con el producto interno usual. Si $S = \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$, aplique el método de Gram Schmidt.*

Solución: . Primero sabemos que $v_1 = (1,1,1)$. Ahora, para v_2:

$$\begin{aligned} v_2 &= w_2 - \frac{\langle w_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1 \\ &= (0,1,1) - \frac{2}{3}(1,1,1) \\ &= \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Para v_3:

$$\begin{aligned} v_3 &= w_3 - \sum_{i=1}^{2} \frac{\langle w_3, v_1\rangle}{\|v_i\|^2}v_i \\ &= (0,0,1) - \frac{1}{3}(1,1,1) - \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}) \\ &= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Q.E.F

Corolario 2.1. *Todo espacio vectorial de dimensión finita con producto interno tiene base ortonormal.*

Lema 2.1. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno, $W \leq V$, con $\gamma = \{w_1, w_2, \dots w_k\}$ base de W y $z \in V$. Entonces: $z \in W^{\perp} \iff \langle z, w_i\rangle = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$.*

Teorema 2.8. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno de dimensión finita y $W \leq V$ con $v \in V$. Entonces existen vectores únicos $w \in W$ y $z \in W^{\perp}$ tal que $v = w + z$.*

Más aún, si $\gamma = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ es base ortonormal de W:

$$w = \sum_{i=1}^{k} \langle v, w_i\rangle w_i$$

Demostración: . Sean $v \in V$, $W \leq V$, $\gamma = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ base ortonormal de W y definimos:

$$w = \sum_{i=1}^{k} \langle v, w_i\rangle w_i$$

También definimos $z = v - w$. Hay que ver que $z \in W^{\perp}$. Si definimos $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ Veamos:

$$\begin{aligned}\langle z, w_j\rangle &= \langle v - w, w_j\rangle \\ &= \left\langle v - \sum_{i=1}^{k} w_i, w_j \right\rangle \\ &= \langle v, w_j\rangle - \sum_{i=1}^{k}\langle v, w_i\rangle\langle w_i, w_j\rangle \\ &= \langle v, w_j\rangle - \langle v, w_j\rangle = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto z está en el complemento ortogonal y así v puede ser expresado como la suma de un elemento en el complemento y uno en el subespacio.

Para la unicidad, suponemos que $v = w + z$ y que $v = w^* + z^*$ con $w, w^* \in W$ y $z, z^* \in W^\perp$.

Entonces $w + z = w^* + z^*$, por lo que $w - w^* = z^* - z$. Como deben estar ambas diferencias en el subespacio y su cumplemento sólo queda que las diferencias sean cero. Entonces si $w - w^* = 0$ y $z - z^* = 0$, tenemos que $w = w^*$ y que $z = z^*$

Q.E.D

Corolario 2.2. *En el teorema anterior, w es el vector de W más cercano al vector v. Es decir:*

$$\|v - w\| \leq \|v - w^*\|, \forall w^* \in W$$

Teorema 2.9. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno. $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ un conjunto ortogonal de V. Entonces:*

1. *S se puede extender a una base ortonormal de V y: $\{v_1, v_2, \ldots, v_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$.*
2. *Si $W = \langle S\rangle$, entonces $S_1 = \{v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ es base ortonormal de $W^\perp$.*
3. *Si $W \leq V$, entonces $dim(V) = dim(W) + dim(W^\perp)$.*

Teorema 2.10. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno. $S, S_0 \subseteq V$ y $W \leq V$ de dimensión finita. Entonces:*

1. *Si $S_0 \subseteq S$, entonces $S^\perp \subseteq S_0^\perp$*
2. *Si $S \subset (S^\perp)^\perp$, entonces $\langle S\rangle \subseteq (S^\perp)^\perp$*
3. *Si $W \leq V$, entonces $W = (W^\perp)^\perp$*
4. *$V = W \oplus W^\perp$*

La demostración de la penúltima parte del teorema usa el teorema 2.8.

Definición 2.6 (Coeficientes de Fourier)**.** Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita con producto interno y $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V. Para $v \in V$, los coeficientes de Fourier de v con respecto a β son dados por $\langle v, v_i\rangle, i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Teorema 2.11. *Sea* $(V, +, \cdot)$ *un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial de dimensión finita con* $W_1, W_2 \leq V$*. Entonces* $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$ *y también* $(W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp$*.*

La demostración se deja como ejercicio. Tomando en cuenta que para la segunda parte se usa la primera.

Definición 2.7. Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $T : V \to V$ lineal. Decimos que T es proyección en el subespacio W_1 a lo largo del subespacio W_2 si para $v = v_1 + v_2$ $v_1 \in W$, y $v_2 \in W_2$, $T(v) = v_1$.

3 Diagonalización

Recordemos que un sistema de m ecuaciones con n incógnitas es de la forma:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}
$$

Se puede representar como una ecuación con matrices. Sea $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$ con las entradas como a_{ij}, los vectores columna $x \in \mathbb{K}^n$ con x_l como entradas y $b \in \mathbb{K}^m$ con b_p como entradas:

$$
Ax = b
$$

$$
\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

Si el vector columna b es cero en todas sus entradas, hablamos de un sistema homogéneo.

Nota. Si tomamos $x = 0$, siempre se va a satisfacer el sistema. Más aún, si $n > m$, entonces existe una solución distinta a cero.

Definición 3.1. Sea la matriz $A \in M_2(\mathbb{K})$. El determinante de A está dado por:

$$
\det(A) = |A| = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}
$$

Definición 3.2. Dada $A \in M_n(\mathbb{K})$ y a_{ij}. El menor de A con respecto a a_{ij} es la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene de eliminar el i-ésimo renglón y la j-ésima columna.

Definición 3.3. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. El determinante de A está dado por:

$$
\det(A) = |A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} |\tilde{A}_{1j}|
$$

Donde $\tilde{A}_{1j}$ es el menor con respecto a a_{1j}

Nota. Un sistema homogéneo de n ecuaciones con n incógnitas $Ax = 0$ con $A \in M_n(\mathbb{K})$ tiene solución distinta de cero si y sólo si $\det(A) = 0$.

Definición 3.4 (Diagonalización)**.** Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita n y $T : V \to V$ un operador lineal. Se dice que T es diagonalizable si existe una base β de V tal que $[T]_\beta$ es una matriz diagonal.

Definición 3.5. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. Para $x \in \mathbb{K}^n$ definimos $L_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ dada por $L_A(x) = Ax$

Nota. L_A es lineal.

Definición 3.6. Una matriz $A \in M_n(\mathbb{K})$ es diagonalizable si L_A es diagonalizable.

Definición 3.7. Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ un operador lineal. Decimos que un vector $v \in V \backslash \{0\}$ es vector propio de T si: $T(V) = \lambda v$. A λ se le llama valor propio de T.

Teorema 3.1. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita n y $T : V \to V$ un operador lineal. Entonces T es diagonalizable si y sólo si existe $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ base de V que consiste de vectores propios de T.*

Definición 3.8. Sean $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$. Se dice que λ es valor propio de A si λ es valor propio de L_A.

Teorema 3.2. *Sean $A \in M_n(\mathbb{K})$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces λ es valor propio de A si y sólo si $det(A - \lambda In) = 0$ con In la matriz identidad $n \times n$.*

Demostración: . Supongamos que λ es valor propio de A. Entonces existe $x \in \mathbb{K}$ tal que $L_A(x) = \lambda x$. Esto es que $Ax = \lambda x$, que es equivalente a $Ax - \lambda \mathrm{In} x = 0$. Factorizando:

$$(A - \lambda \mathrm{In})x = 0$$

Esto es un sistema de ecuaciones homogéneo para x y la matriz $(A - \lambda \mathrm{In})$. Entonces por una nota anterior sabemos que este sistema tiene solución si y sólo si $\det(A - \lambda \mathrm{In}) = 0$.

Q.E.D

Definición 3.9. Sea $A \in M_n(\mathbb{K})$. El polinomio característico de A está dado por:

$$f(t) = \det(A - t\mathrm{In})$$

Definición 3.10. Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita n, con β base de V, $T : V \to V$ un operador lineal. El polinomio característica de T está dado por

$$f(t) = \det([T]_\beta - t\mathrm{In})$$

Definición 3.11. Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y β, γ bases de V. La matriz

$$[\mathrm{Id}]_\beta^\gamma = Q$$

Es la matriz de cambio de base.

Nota. $[T]_\beta = Q^{-1}[T]_\gamma Q$

Teorema 3.3. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ un operador lineal. Entonces el polinomio característico de T es independiente de la base.*

Teorema 3.4. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n y $T : V \to V$ un operador lineal. Entonces:*

1. *$f(t)$ tiene grado n y su coeficiente principal es $(-1)^n$*
2. *T tiene a lo más n valores propios.*

Teorema 3.5. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, con $T : V \to V$ operador lineal y $\lambda \in \mathbb{K}$ un valor propio de T. Un vector $v \in V$ es vector propio de T con valor propio λ si y sólo si $v \neq 0$ y $v \in N(T - \lambda In)$*

Ejemplo 3.1. *Encontrar todos los valores propios y vectores propios, para encontrar una base que diagonalice a:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Solución: . Para encontrar los valores propios, vamos a tomar el polinomio característico de la matriz:

$$f(t) = \det(A - tI) = \begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & 2-t \end{pmatrix} = t^2 - 3t + 2 - 6 = (t+1)(t-4)$$

Entonces los valores propios son las raíces de este polinomio: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 4$.

Para encontrar los vectores propios respectivos de cada valor propio vamos a recordar que en el teorema 3.5, x es vector propio si y sólo si está en $N(T - \lambda I)$ y es distinto de cero. Así para λ_1:

$$A - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

El primer vector propio $x = (x_1, x_2)$ debe ser tal que:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 3x_1 & 3x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces $x_1 = -x_2$ con la condición de que x_1 sea distinto de cero. Entonces si proponemos $x_1 = 1$, tenemos que el primer vector propio es $(1, -1)$.

Para λ_2:

$$A - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$$

Entonces para un vector propio $y = (y_1, y_2)$:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{pmatrix} -3y_1 & 2y_2 \\ 3y_1 & -2y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Este sistema se satisface para todo múltiplo de $(3, 2)$. Entonces lo que proponemos es el vector propio $(2, 3)$

Como tenemos dos vectores propios para un espacio de dimensión dos, entonces A es diagonalizable. Para diagonalizarlo hacemos una matriz de cambio de base con los vectores propios como columnas:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Encontramos la inversa con Gauss-Jordan:

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

Ahora por una nota anterior: $Q^{-1}AQ$ nos va a dar la matriz de la transformación de A en la base de los vectores propios. Es decir la matriz diagonal:

$$Q^{-1}AQ = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right]$$

Entonces la matriz diagonal es:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Q.E.F

Teorema 3.6. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita n, con $T : V \to V$ un operador lineal y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ valores propios distibtos de T. Si $v_1, v_2, \dots, v_k$ son vectores propios de T tales que $T(v_i) = \lambda_i v_i$, entonces el conjunto $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ es linealmente independiente.*

Demostración: . Procederemos por inducción sobre $\mathbb{K}$. Como paso base, si $k = 1$, entonces el conjunto $\{v_1\}$ es linealmente independiente por ser unitario, ya que es distinto de cero.

Supongamos que el resultado es cierto para $k-1$, entonces queda demostrar que funciona para k. Sean $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ valores propios de T distintos y $v_1, v_2, \ldots, v_k$ vectores propios de T tal que $T(v_i) = \lambda_i v_i$. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tales que:

$$0 = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$$

Como $T - \lambda_k I$ es un operador lineal, entonces:

$$\begin{aligned}
0 = (T-\lambda_k I)(0_v) &= (T-\lambda_k I)\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (T-\lambda_k I)(v_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (T(v_i) - \lambda_k v_i) \\
&= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (\lambda_i v_i - \lambda_k v_i) && \text{por definición de vector propio} \\
&= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i (\lambda_i - \lambda_k) v_i && \text{ya que el último término es cero}
\end{aligned}$$

Por hipótesis de inducción, si tomamos $i \leq k-1$, entonces $\alpha_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$. Pero como $\lambda_i - \lambda_k \neq 0$, entonces $\alpha_i = 0$ para $i \leq k-1$. Por lo que $0 = \alpha_k v_k$, y como v_k es vector propio, no queda más que $\alpha_i = 0$. Por lo tanto es linealmente independiente, ya que sólo hay una forma de representar al cero.

Q.E.D

Corolario 3.1. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, y $T : V \to V$ un operador lineal. Si T tiene n valores propios distintos, entonces T es diagonalizable.*

4 Eigenespacios

Definición 4.1 (Descomposición del Polinomio Característico)**.** Sea $f(t) \in P[\mathbb{K}]$, un polinomio de grado n. Se dice que $f(t)$ se descompone en $\mathbb{K}$ si existen escalares $c, a_1, a_2, \ldots, a_n$ no necesariamente distintos tales que:

$$f(t) = c(t - a_1)(t - a_2) \ldots (t - a_n)$$

Teorema 4.1. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, y $T : V \to V$ un operador lineal. Si T es diagonalizable, entonces su polinomio característico se descompone en $\mathbb{K}$.*

La demostración de este teorema se da si se toma la matriz diagonal, y se obtiene su polinomio característico.

Definición 4.2 (Multiplicidad)**.** Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, $T : V \to V$ un operador lineal con polinomio característico $f(t)$ y λ un valor propio de T. La multiplicidad de λ es k si:

$$(t - \lambda)^k \mid f(t) \quad \text{y} \quad (t - \lambda)^{k+1} \nmid f(t)$$

Definición 4.3 (Eigenespacio)**.** Sea T un operador lineal en un $\mathbb{K}$-espacio vectorial V y sea λ un valor propio de T. Definimos el conjunto:

$$E_\lambda\{v \in V : T(v) = \lambda v\} = N(T - \lambda I)$$

Como el eigenespacio de T correspondiente a λ. Análogamente se define el eigenespacio de una matriz cuadrada A como el eigenespacio del operador L_A.

Teorema 4.2. *Cada eigenespacio es un subespacio vectorial.*

Teorema 4.3. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita con T operador lineal y sea λ un valor propio de T con multiplicidad m. Entonces $1 \leq dim(E_\lambda) \leq m$.*

Definición 4.4. Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, con $T : V \to V$ operador lineal y $v \in V \setminus \{0\}$. El subespacio:

$$W = \left\langle \{v, T(v), T^2(v), \ldots\} \right\rangle$$

Se llama subespacio T-cíclico generado por v.

Nota. El subespacio T-cíclico generado por v es un subespacio T-invariante. Más aún, es el subespacio T-invariante más "pequeño" que contiene a v.

Definición 4.5. Sean $w_1, w_2, \ldots, w_k$ subespacios de el $\mathbb{K}$-espacio vectorial V. Decimos que V es la suma directa de los subespacios $w_1, w_2, \ldots, w_k$ y lo denotamos como:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} w_i$$

Esto es si y sólo si:

1. $$V = \sum_{i=1}^{k} w_i$$

2. Para cada $1 \leq j \leq k$ se tiene que:
$$W_j \cap \sum_{i \neq j} W_i = \{0\}$$

Teorema 4.4. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y sean $w_1, w_2, \ldots, w_k$ subespacios de V. Son equivalentes:*

1. $$V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$$

2. $$V = \sum_{i=1}^{k} w_i$$
También que para cualesquiera vectores $v_1, v_2, \ldots, v_k$ con $v_i \in W_i$, si $v_1+v_2+\cdots+v_k = 0$, entonces $v_i = 0$ para todo i.

3. Cada vector $v \in V$ se puede escribir como combinación única de un sólo vector en cada espacio.

4. Si γ_i es base ordenada para W_i, entonces la unión de las bases de cada espacio:
$$\bigcup_{i=1}^{k} \gamma_i$$
conforma la base ordenada de V.

5. Para cada i, existe una base ordenada γ_i para W_i tal que:
$$\bigcup_{i=1}^{k} \gamma_i$$
es base ordenada de V.

Teorema 4.5. *Sea T un operador lineal de V, donde dim$(V) < \infty$. T es diagonalizable si y sólo si V es suma directa de los eigenespacios de T.*

Demostración: . Para demostrar $\implies$, vamos a suponer que T es diagonalizable. Entonces existen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ valores propios de T diferentes. Como T es diagonalizable, entonces si m es la multiplicidad de cada λ_i, entonces $\dim(E_{\lambda_i}) = m_i$

Además, $m_1 + m_2 + \cdots + m_k = n = \dim(V)$. Si consideramos una base β_i para cada E_{λ_i}, entonces $|\beta_i| = m_i$.

Considerando

$$\beta = \bigcup_{i=1}^{k} \beta_i$$

Entonces, porque los vectores propios son linealmente independientes y son tantos como la dimensión; β es base de V.

Por el teorema 4.4 se tiene que:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$$

Ahora para demostrar $\Longleftarrow$, tenemos que suponer que:

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} E_{\lambda_i}$$

Entonces por el mismo teorema 4.4 tenemos que:

$$\beta = \bigcup_{i=1}^{k} \beta_i$$

es base de V compuesta por vectores propios. Por lo tanto T es diagonalizable.

Q.E.D

5 El teorema de Cayley-Hamilton

Vamos a recordar un par de definiciones útiles.

Definición 5.1. Sea $T : V \to V$ un operador lineal y $W \leq V$. Decimos que W es T-invariante si

$$T(W) \subseteq W$$

Definición 5.2. Sea $T : V \to V$ un operador lineal con $v \in V$.

$$W = \left\langle \{v, T(V), T^2(V), \dots\} \right\rangle$$

Le llamamos el subespacio T-cíclico.

Observemos que W es el subespacio T-invariante que contiene a v.

Teorema 5.1. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita con $T : V \to V$ operador lineal, $v \in V \backslash 0$ y W el subespacio T-cíclico de v. Si dim$(W) = k$, entonces:*

$$\beta = \{v, T(v), T^2(v), \dots, T^{k-1}(v)\}$$

es base de W.

Teorema 5.2. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $T : V \to V$ operador lineal y $W \leq V$ T-invariante. Entonces W es $g(T)$-invariante para todo polinomio g.*

Teorema 5.3. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita y $T : V \to V$ operador lineal, $v \in V \backslash \{0\}$ con W el subespacio T-cíclico de v. Para cualquier $v \in W$, $w \in W$ si y sólo si existe un polinomio $g(t)$ tal que $w = g(T)(r)$.*

Más aún el grado de este polinomio es inferior a la dimensión de W.

Teorema 5.4. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, $T : V \to V$ un operador lineal, $v \in V \backslash \{0\}$, y W_V el subespacio T-cíclico generado por v y supongamos que dim$(W_v) = k$.*

Si los escalares $a_0, a_1, \dots, a_{k-1} \in \mathbb{K}$ son tales que

$$a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_{k-1} T^{k-1}(v) + T^k(v) = 0$$

Entonces:

$$g(t) = \left(a_0 + a_1 t + 1_2 t^2 + \dots, + a_{k-1} t^{k-1} + t^k\right)(-1)^k$$

Es el polinomio característico de $T|_{W_v}$.

Teorema 5.5. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, $T : V \to V$ operador lineal y $W \leq V$ subespacio T-invariante. Entonces el polinomio característico de $T|_W$ divide al polinomio característico de T.*

Teorema 5.6 (Cayley-Hamilton)**.** *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, con $T : V \to V$ operador lineal cuyo polinomio característico es $f(t)$. Entonces $f(T) = T_0$. Con T_0 la transformación que manda todo a cero.*

A esto se le llama que T satisface su propio polinomio característico.

Demostración: . Sea W_v el subespacio T-cíclico generado por v. Por el teorema 5.1, tenemos que existen $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{K}$ tales que:

$$a_0 v + a_1 T(v) + \cdots + a_{k-1} t^{k-1}(v) + T^k(v) = 0$$

Entonces por el teorema 5.4 tenemos que:

$$g(t) = (-1)^k \left(a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_{k-1} t^{k-1} + t^k\right)$$

Es el polinomio característico de $T|_{W_v}$. Así $g(T)(v) = 0$

Ahora, por el teorema 5.5 existe $q(t)$ tal que: $f(t) = q(t)g(t)$. Por lo tanto:

$$f(T)(v) = q(T)(g(T)(v)) = q(T) \cdot 0 = 0$$

Q.E.D

Teorema 5.7. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n con $T : V \to V$ operador lineal y $W_1, W_2, \ldots, W_k$ subespacios T-invariantes tales que*

$$V = \bigoplus_{i=1}^{k} W_i$$

Entonces el polinomio característico de T, $f(t)$, se puede escribir como:

$$\prod_{i=1}^{k} f_k(t)$$

Donde $f_i(t)$ es el polinomio característico de $T|_{W_i}$.

La demostración de este teorema se hace por inducción e involucra las equivalencias de suma directa y eigenespacios.

Teorema 5.8. *Sea $M \in M_n(\mathbb{K})$ de la siguiente forma:*

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & Id \end{pmatrix}$$

En este caso A y B son matrices cualesquiera, entonces tenemos que $det(M) = det(A)$.

Teorema 5.9. *Si T es un operador lineal den V con dimensión finita, P_T es el polinomio característico de T y se descompone, entonces $\forall W \leq V$ T-invariante $P_T|_W$ también se descompone.*

Demostración: . Sabemos que P_W divide a P_T, y sabemos que P_T se descompone. Además W tiene al menos un vector propio de V. Por lo tanto $P_T|_W$ también se descompone.

Q.E.D

Teorema 5.10. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión 2 y sea T un operador lineal. Entonces V es un espacio T-cíclico de si mismo o bien $T = \lambda Id$ para algún $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Este es un ejercicio.

Teorema 5.11. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $T : V \to V$ operador lineal y $W \leq V$ un subespacio T-invariante. Si $v \in V$ es vector propio de T restringido a W con valor propio λ, entonces v es vector propio para T en V.*

Este también es un ejercicio que consta en observar las propiedades del núcleo bajo restricciones.

6 Forma canónica de Jordan

Definición 6.1. Sean dos matrices $B_1 \in M_m(\mathbb{K})$, $B_2 \in M_n(\mathbb{K})$. Definimos:

$$(B_1 \oplus B_2)_{ij} = \begin{cases} (B_i)_{ij}, & 1 \leq j, \quad i \leq m \\ (B_2)_{ij}, & m+1 \leq j, \quad i \leq m+n \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Ejemplo 6.1. *Sean:*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$B_1 \oplus B_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Teorema 6.1. *Sea V de dimensión finita con $T : V \to V$ diagonalizable. Entonces la restricción a cualquier subespacio T-invariable es diagonalizable.*

Definición 6.2. Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $T : V \to V$ un operador lineal y $\lambda \in \mathbb{K}$. Un vector propio generalizado de T con valor propio λ si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $(T - \lambda Id)^p(v) = 0$

Nota. Si p es el menor natural tal que $(T - \lambda Id)^p(v) = 0$, entonces $(T - \lambda Id)^{p-1}(v)$ es vector propio de T con valor propio λ. Ya que:

$$(T - \lambda Id)\left((T - \lambda Id)^{p-1}(v)\right) = 0$$

Definición 6.3. Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $T : V \to V$ un operador lineal, con λ valor propio de T. El eigen espacio generalizado de T con valor propio λ está dado por:

$$K_\lambda = \{v \in V : (T - \lambda Id)^p(v) = 0\}$$

Para alguna $p \in \mathbb{N}$.

Teorema 6.2. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con $T : V \to V$ operador lineal y λ valor propio de T. Entonces:*

1. *K_λ es un subespacio T-invariante de V tal que $E_\lambda \subseteq K_\lambda$.*
2. *Si $\mu \in \mathbb{K} \backslash \{\lambda\}$, entonces:*

$$(T - \mu Id)|_{K_\lambda}$$

es inyectiva.

Teorema 6.3. *Sea $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, $T : V \to V$ operador lineal cuyo polinomio característico se descompone y λ un valor propio de T con multiplicidad m. Entonces:*

1. $dim(K_\lambda) \leq m$
2. $K_\lambda = N((T - \lambda Id)^m)$

Teorema 6.4. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, $T : V \to V$ un operador lineal y λ valor propio de T. Entonces K_λ es T-invariante, y $E_\lambda \subseteq K_\lambda$. Además para todo $\mu \neq \lambda$, $(T - \mu Id)|_{K_\lambda}$ es inyectiva.*

Teorema 6.5. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, $T : V \to V$ operador lineal, λ valor propio de multiplicidad m. Entonces $dim(K_\lambda) \leq m$. Más aún:*

$$K_\lambda = N((T - \lambda Id)^m)$$

Teorema 6.6. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión n, $T : V \to V$ un operador lineal cuyo polinomio característico se descompóne y $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ los valores propios distintos de T. Para cada $v \in V$ existen $v_i \in K_{\lambda_i}$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ tal que:*

$$v = v_1 + v_2 + \cdots + v_k$$

Teorema 6.7. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, $T : V \to V$ un operador lineal cuyo polinomio característico se descompone, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ los valores propios de T, con $\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$, $m_1, m_2, \ldots, m_k$ la multiplicidad de cada valor propio respectivo y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ bases de cada K_{λ_i} respectivamente. Entonces:*

1. $\beta_i \cap \beta_j = \varnothing$ *si* $i \neq j$.
2. $b = \bigcup_{i=1}^{k} \beta_i$ *es base de* V.
3. $dim(K_{\lambda_i}) = m_i$

Corolario 6.1. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de diimensión finita, $T : V \to V$ un operador lineal cuyo polinomio característico se descompone, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ los valores propios distintos de T. Entonces T es diagonalizable si y sólo si $E_{\lambda_i} = K_{\lambda_i}$.*

Definición 6.4. Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, $T : V \to V$ un operador lineal cuyo polinomio característico se descompone, $v \in V$ un vector propio generalizado de T con valor propio λ. Supongamos que p es el menor entero tal que:

$$(T - \lambda Id)^p(v) = 0$$

El ciclo de vectores propios generalizados es:

$$\gamma = \{(T - \lambda Id)^{p-1}(v), (T - \lambda Id)^{p-2}(v), \ldots, (T - \lambda Id)(v), v\}$$

El vector $(T - \lambda Id)^{p-1}(v)$ es el vector inicial del ciclo, que es vector propio de T, y v es el vector final del ciclo.

Teorema 6.8. *Sean $(V, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial de dimensión finita, $T : V \to V$ un operador lineal cuyo polinomio característico se descompone y β una base de V que es unión ajena de ciclos de vectores propios de T. Entonces:*

Para cada ciclo γ contenido en β, $W = \langle \gamma \rangle$ es T-invariante y $[T_w]$ es un bloque de Jordan.

También β es una base canónica de Jordan.

Corolario 6.2. *Sea T operador lineal en un espacio vectorial de dimensión finita cuyo polinomio característico se descompone. Entonces T tiene una forma canónica de Jordan.*

Definición 6.5. Sea $A \in M_{N \times N}(\mathbb{K})$ tal que el polinomio característico de A (y por lo tanto L_A) se descompone. La forma canónica de Jordan está definida como la fórma canónica de jordan del operador L_A.

Corolario 6.3. *Sea A una matriz de $n \times n$ cuyo polinomio característico se descompone. Entonces A tiene forma canónica de Jordan J, y A es similar a J.*

Teorema 6.9. *Sea T operador lineal en un espacio de dimensión finita cuyo polinomio característico se descompone. Entonces V es la suma directa de los eigenespacios*